ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ОПТОЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

© И.Н. Маслеников

Аннотация. Для модели оптоэлектронного осциллятора, описываемого дифференциально-интегральным уравнением, изучена устойчивость состояния равновесия. Для этого построено характеристическое уравнение и определено положение его корней. В зависимости от значений параметров определена устойчивость состояния равновесия. Выделены критические значения параметров, при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. В критических случаях построены аналоги нормальных форм.
Ключевые слова: характеристический квазиполином; асимптотическое представление корней; нормальная форма

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x + \delta\int_{t_0}^{t} x(s)ds = \beta_1 F(x(t-\tau)). \qquad (1)$$

Здесь β_1 – параметр; τ – параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0{,}005$ и $\delta = 0{,}016$. В силу этого будем предполагать, что параметры ε и δ малы $(0 < \varepsilon \ll 1, 0 < \delta \ll 1)$ и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta$, $k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В § 2 опишем устойчивость состояния равновесия, а в § 3 исследуем бифуркации, которые возникают при потере устойчивости нулевого решения.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптоэлектронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым.

2. Исследование устойчивости состояния равновесия

В работе [3] проведено исследование расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения (1).

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta e^{-\lambda}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) справедливы теоремы, доказанные в [3].

Теорема 1. *При* $|\beta| < 1$ *и достаточно малом* ε *все корни (2) имеют отрицательные вещественные части.*

Теорема 2. *При* $\beta = 1 + \varepsilon^2\beta_1$ *корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \qquad \text{при } n \neq 0,$$

$$\text{где } \lambda_{n0} = 2\pi n i, \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1,$$

$$\text{и } \lambda = \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + o\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \qquad \text{при } \lambda_0 = 0,$$

$$\text{где } \lambda_1 = \pm\sqrt{k}i, \lambda_2 = \frac{-k}{4}.$$

Теорема 3. *При* $\beta = -(1 + \varepsilon^2\beta_1)$ *корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2),$$

$$\text{где } \lambda_{n0} = \pi(2n+1)i, \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1,$$

$$\text{и } \lambda = \frac{-\varepsilon k}{2} + o(\varepsilon), \qquad \text{при } \lambda_0 = 0.$$

3. Построение нормальной формы уравнения

Уравнение (1) допускает запись в виде (3):

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta F(\dot{y}(t-1)). \qquad (3)$$

Разложим в уравнении (3) функцию F в ряд Тейлора:

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1 \dot{y}(t-1) + \beta_2(\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3(\dot{y}(t-1))^3 + \cdots. \qquad (4)$$

β_2, β_3 – некоторые постоянные.

3.1 Построение нормальной формы при $\boldsymbol{\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)}$

Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (4), при параметре $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta), \beta > 0$. При таком β_1 характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Для исследования поведения решений воспользуемся методом квазинормальных форм [4–5]. Представим функцию y в виде ряда:

$$y = \varepsilon V(t) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1(t) + \varepsilon^3 U_2(t) + \cdots. \qquad (5)$$

U_1, U_2 периодические с периодом 1: $U_1(t) \equiv U_1(t+1)$, $U_2(t) \equiv U_2(t+ +1)$. Функция W такая, что среднее значение $\beta_2\dot{V}^2 - kW(\tau)$ равняется 0:

$$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k}\int_0^1 \dot{V}^2(t,\tau)dt.$$

$V(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\cdots)t} V_n(\tau), \qquad \text{где } \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения λ_{n0}, λ_{n1}, λ_{n2} определяются из асимптотического приближения корней уравнения (2) (см. Теорему 3).

Обозначим $\xi_n(\varepsilon)$:

$$\xi_n(\varepsilon) = i(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \cdots).$$

Для удобства выпишем первую и вторую производную функции V.

$$\dot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau)) e^{\xi_n t}, \quad (6)$$

$$\ddot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau)) e^{\xi_n t}. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее $\dot{y}(t-1)$:

$$\dot{y}(t-1) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\xi_n V_n(\tau - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 V_{n'}(\tau - \varepsilon^2)\right) e^{\xi_n t} e^{-\xi_n} +$$
$$+\varepsilon^3 \dot{W}(\tau - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1) + \cdots . \quad (8)$$

Разложим в ряды Тейлора функции $e^{-\xi_n}$, $V_n(\tau - \varepsilon^2)$ и $W(\tau - \varepsilon^2)$, получим:

$$e^{-\xi_n} = e^{-\pi(2n+1)i - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} - \cdots} = -1 + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2 - \cdots,$$
$$V_n(\tau - \varepsilon^2) = V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \cdots,$$
$$W(\tau - \varepsilon^2) = W(\tau) - \varepsilon^2 W'(\tau) + \cdots. \quad (9)$$

Подставим (5), (6), (7), (8), (9) в уравнение (4), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$, выпишем результат в явном виде:

$$\varepsilon(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau)) e^{\xi_n t} + \varepsilon^5 W''(\tau) +$$
$$+\varepsilon^2 \ddot{U}_1 + \varepsilon^3 \ddot{U}_2) + \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau)) e^{\xi_n t} + \varepsilon^3 W'(\tau) +$$
$$+\varepsilon^2 \dot{U}_1 + \varepsilon^3 \dot{U}_2 + k\varepsilon(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} V_n(\tau) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1 + \varepsilon^3 U_2) + o(\varepsilon^4) =$$
$$= -(1 + \varepsilon^2\beta)(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n (V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau)) + \varepsilon^2 (V_n'(\tau) - \varepsilon^2 V_n''(\tau))) e^{\xi_n t} \times$$
$$\times (-1)(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2) + \varepsilon^3 (W'(\tau) - \varepsilon^2 W''(\tau)) +$$
$$+\varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1)) + \beta_2(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n (V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau)) +$$

$$+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+$$
$$+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2W''(\tau))+\varepsilon^2\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^3\dot{U}_2(t-1))^2+$$
$$+\beta_3(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2V_{n'}(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\times$$
$$\times(-1)\left(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2\right)+$$
$$+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2W''(\tau))+\varepsilon^2\dot{U}_1(t-1)+\varepsilon^3\dot{U}_2(t-1))^3. \quad (10)$$

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$.

При ε получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}=\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}.$$

При ε^2 получаем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}^2V_n(\tau)e^{\xi_n t}+\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n1}V_n(\tau)e^{\xi_n t}+\dot{U}_1+$$
$$+\sum_{-\infty}^{\infty}kV_n(\tau)e^{\xi_n t}+kW(\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)(-\lambda_{n1}V_n(\tau)+\lambda_{n1}\lambda_{n0}V_n(\tau))e^{\xi_n t}-$$
$$-\dot{U}_1(t-1)+\beta_2\textstyle\sum_{-\infty}^{\infty}g_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}. \quad (11)$$

$g_{2n}(V)$ – это коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t}\right)^2.$$

После сокращений из уравнения (11) определяется $\dot{U}_1$:

$$\dot{U}_1=\frac{1}{2}(\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}g_{2n}(V(t,\tau))e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}-kW(\tau)),$$
$$\dot{U}_1=\frac{1}{2}(\beta_2\dot{V}^2-kW(\tau)).$$

U_1 находится в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^r \beta_2 \dot{V}^2(s,\tau) - W(\tau)ds.$$

Обратим внимание, что U_1 периодическая, так как среднее значение подынтегральной функции равно нулю.

При ε^3 получаем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} 2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau) + \ddot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty} (\lambda_{n2}V_n(\tau) + V_{n'}(\tau))e^{\xi_n t} + \dot{U}_2 +$$

$$+kU_1 + W'(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)e^{\xi_n t}((-1)(\lambda_{n2}V_n(\tau) - \lambda_{n0}V_{n'}(\tau) + V_n^{'}(\tau)) +$$

$$+\lambda_{n1}^2 V_n(\tau) + (-\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2)\lambda_{n0}V_n(\tau)) - (\dot{U}_2(t-1) + W'(\tau)) +$$

$$+\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1(t-1) + \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2n}(V)e^{(\pi(2n+1)i + o(\varepsilon))t} +$$

$$+\beta_2 \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} + \beta_3 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_{3n}(V)e^{(\pi(2n+1)i + o(\varepsilon))t}. \qquad (12)$$

$\varphi_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2)\dot{U}_1(t-1)\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t};$$

$\varphi_{3n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-1)\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1)iV_n(\tau)\right)^3;$$

$f_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2)\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{m0}\lambda_{m1}V_m(\tau)e^{\xi_m t}.$$

Уравнение (12) упрощается до вида:

$$\ddot{U}_1 + 2\dot{U}_2 + kU_1 + 2W'(\tau) - \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V) e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (-\lambda_{n0} V_{n'}(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2 \lambda_{n0} V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) +$$
$$+\beta_2 \varphi_{2n}(V) + \beta_3 \varphi_{3n}(V)) e^{(\pi(2n+1)i + o(\varepsilon))t}. \quad (13)$$

В уравнении (13) левая часть периодическая, а правая антипериодическая, равенство возможно тогда и только тогда, когда левая и правая части равны 0.

$\dot{U}_2$ определяется в виде:

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V) e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} - \ddot{U}_1 - kU_1 - 2W'(\tau)).$$

Рассмотрим антипериодическую часть уравнения (13) и разложим ее на соответствующие степени $e^{\xi_n t}$:

$$\lambda_{n0} V_{n'}(\tau) = \tfrac{1}{2}\lambda_{n1}^2 \lambda_{n0} V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \beta_2 \varphi_{2n}(V) + \beta_3 \varphi_{3n}(V). \quad (14)$$

Подставим значения λ_{n1} и λ_{n0} в уравнение (14):

$$V_n'(\tau) = -\frac{1}{2}\left(\pi^2(2n+1)^2 - 2k + \frac{k^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right) V_n(\tau) +$$
$$+\beta V_n(\tau) + \tfrac{\beta_2}{\pi(2n+1)i}\varphi_{2n}(V) + \tfrac{\beta_3}{\pi(2n+1)i}\varphi_{3n}(V). \quad (15)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида с краевыми условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 r} + kV - \frac{k^2}{2} J^2(V) + \beta V + \beta_2 J\left(U_1 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^3\right), \quad (16)$$

$$\int_0^1 V(\tau, r) dr = 0, V(\tau, r) \equiv -V(\tau, r+1). \quad (17)$$

$J(V)$, как и ранее, обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)), (J(V))'_r \equiv V.$$

Представим функцию V из уравнения (16) в виде:

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau). \quad (18)$$

Подставив формулу (18) в уравнение (16) и приравняв коэффициенты получившихся рядов Фурье, мы получим построчное равенство, что для каждого n справедливо равенство (14).

Теорема 4. *Пусть V_* – решение (16) с краевыми условиями (17), причем*

$$V_* = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau),$$

тогда

$$y = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n r} V_n(\tau) + \varepsilon W(\tau)$$

является асимптотическим по невязке равномерно по $t \geq 0$ решением (4).

Доказательство теоремы следует из построений решения, сделанных ранее.

Аналогичные действия и результаты получаются при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$.

4. Заключение

Была рассмотрена модель оптоэлектронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения был рассмотрен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра β, при котором состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β. Интересным оказывается то, что кроме основной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра β_1. Главным результатом работы является построение нормальной формы решения уравнения (4) при критических параметрах β_1.

Список литературы

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems // Physical Review Letters. 2013. Vol. 111. P. 054103.
2. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А., Глазков Д.В.* Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осцилятора с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 71-82.
3. *Масленикова И.Н.* Исследование локальной динамики дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием // Современные проблемы математики и информатики. 2018. Вып. 18. С. 39-45.
4. *Кащенко И.С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011. 44 с.
5. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 12. С. 2141-2150.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

Поступила в редакцию 17.09.2019 г.
Отрецензирована 03.10.2019 г.
Принята в печать 22.10.2019 г.

Информация об авторе:
Масленикова Игорь Николаевич – магистрант по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика». Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: igor.maslenikov16@yandex.ru

STUDY OF THE LOCAL DYNAMICS OF THE OPTOELECTRONIC OSCILLATOR MODEL

Maslenikov I.N., Master's Degree Student in "Applied Mathematics and Informalitics" Programme. P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: igor.maslenikov16@yandex.ru

Abstract. We study the stability of equilibrium state for the model of optoelectronic oscillator described by the differential-integral equation. For this, we construct a characteristic equation and determine the position of its roots. Depending on the parameters values, we determine the stability of equilibrium state. We identified the critical parameters values at which the

equilibrium state changes its stability. In critical cases, we construct analogues of standard forms.
Keywords: characteristic quasipolynomial; asymptotic roots representation; standard form

Received 17 September 2019
Reviewed 3 October 2019
Accepted for press 22 October 2019